

# **MATURZYSTO!**

## **Część V – równania i nierówności wymierne z jedną niewiadomą.**

Rozwiąż je samodzielnie, a potem, jeśli chcesz,  
sprawdź rozwiązania i porównaj wyniki.

## **POWODZENIA!**

Zadania powtórzeniowe przygotowała:  
mgr Dorota Nawrocka  
nauczycielka matematyki  
Zespołu Szkół Technicznych i Ogólnokształcących  
we Wrześni.

## V. Równania i nierówności wymierne

### Powtórz!

- Wzory skróconego mnożenia.
- Sprowadzanie do wspólnego mianownika.
- Rozkład wielomianu na czynniki.
- Siatka znaków lub fala (wężyk).

$$1. \frac{15}{4x-8} - \frac{3}{4x+8} = \frac{x^2-1}{x^2-4}$$

$$2. \frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-6} + \frac{1}{x-8} = 0$$

$$3. \frac{x+3}{2x-4} \leq 0$$

$$4. \frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} \geq 2$$

$$5. \frac{(x+1)(x+3)(2x+4)(x-2)}{(x-5)(x-1)(x-3)} \leq 0$$

$$6. \frac{(x^2-4)(x+3)}{(x-2)(x^2-9)} < 0$$

## Zadanie 1.

$$\frac{15}{4x-8} - \frac{3}{4x+8} = \frac{x^2-1}{x^2-4}$$

Określam dziedzinę (D):

Założenie:

$4x-8 \neq 0$ $4x \neq 8 / :4$ $x \neq 2$	$\wedge$ $4x+8 \neq 0$ $4x \neq -8 / :4$ $x \neq -2$	$\wedge$ $x^2-4 \neq 0$ $(x-2)(x+2) \neq 0$ $x-2 \neq 0 \vee x+2 \neq 0$ $x \neq 2 \quad x \neq -2$
---	---	---

$$D: x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{15}{4x-8} - \frac{3}{4x+8} = \frac{x^2-1}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{15(x+2)}{4(x-2)(x+2)} - \frac{3(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \frac{4(x^2-1)}{4(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{15x+30-3x+6}{4(x-2)(x+2)} - \frac{4x^2-4}{4(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{15x+30-3x+6-4x^2+4}{4(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{-4x^2+12x+40}{4(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow -4x^2+12x+40=0$$

$$-4x^2+12x+40=0 / :(-4)$$

$$x^2-3x-10=0$$

$$a=1 \quad b=-3 \quad c=-10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \notin D$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \in D$$

**Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest  $x = 5$ .**

## **Zadanie 2.**

$$\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-6} + \frac{1}{x-8} = 0$$

Określam D:

Założenia:

$x - 5 \neq 0$ $x \neq 5$	$\wedge$ $x - 6 \neq 0$ $x \neq 6$	$\wedge$ $x - 8 \neq 0$ $x \neq 8$
------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

$$D: x \in R - \{5, 6, 8\}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-6} + \frac{1}{x-8} = 0$$

$$\frac{8(x-6)(x-8)}{(x-5)(x-6)(x-8)} - \frac{9(x-5)(x-8)}{(x-6)(x-5)(x-8)} + \frac{1(x-5)(x-6)}{(x-8)(x-5)(x-6)} = 0$$

$$\frac{8(x^2 - 8x - 6x + 48) - 9(x^2 - 8x - 5x + 40) + x^2 - 6x - 5x + 30}{(x-5)(x-6)(x-8)} = 0$$

$$\frac{8x^2 - 64x - 48x + 384 - 9x^2 + 72x + 45x - 360 + x^2 - 11x + 30}{(x-5)(x-6)(x-8)} = 0$$

$$\frac{-123x + 117x + 414 - 360}{(x-5)(x-6)(x-8)} = 0 \Leftrightarrow \text{licznik} = 0, \text{czyli } -6x + 54 = 0$$

$$-6x = -54 / : (-6)$$

$$x = 9 \in D$$

**Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest  $x = 9$ .**

### Zadanie 3.

$$\frac{x+3}{2x-4} \leq 0$$

Określam dziedzinę:

Założenie:

$$2x - 4 \neq 0$$

$$2x \neq 4 / : 2$$

$$x \neq 2$$

$$D: x \in R - \{2\}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{x+3}{2x-4} \leq 0 \quad \text{dla zbadania znaku- iloraz zamieniam na iloczyn}$$

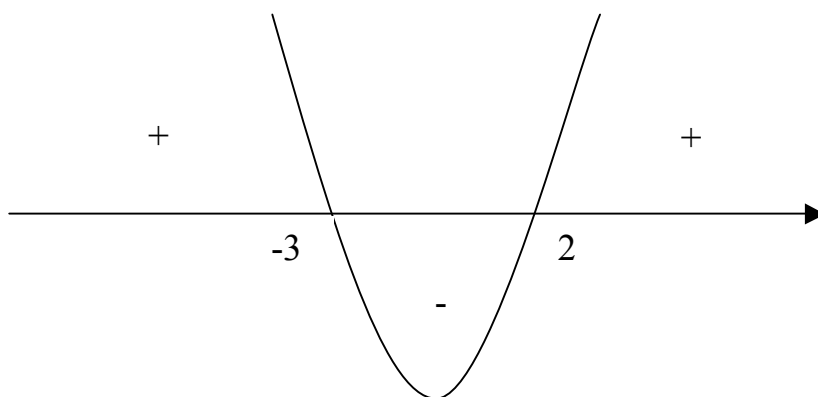
lub mnożę (obustronnie) przez kwadrat mianownika.

$$(x+3)(2x-4) \leq 0$$

$$x+3=0 \quad \vee \quad 2x-4=0$$

$$\underline{x=-3} \qquad \qquad 2x=4 / : 2$$

$$\underline{x=2}$$



$$x \in < -3, 2 >$$

Zestawienie rozwiązań z dziedziną:

$$\text{Rozw.: } x \in < -3, 2 > \quad \wedge \quad D: x \in R - \{2\}$$

**Odpowiedź:** Rozwiązaniem nierówności jest przedział  $x \in < -3, 2 >$ .

## Zadanie 4.

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} \geq 2$$

Określam dziedzinę

Założenia:

$$\begin{aligned} x-1 \neq 0 & \wedge x+1 \neq 0 \\ x \neq 1 & \quad x \neq -1 \end{aligned}$$

$$D: x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} \geq 2$$

$$\frac{(2x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{x \cdot (x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq \frac{2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 2}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \quad / \quad [(x-1)(x+1)]^2$$

$$(x^2 + 2x + 3)(x+1)(x-1) \geq 0$$

Obliczam pierwiastki, a następnie sporządzam wykres (fałę):

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

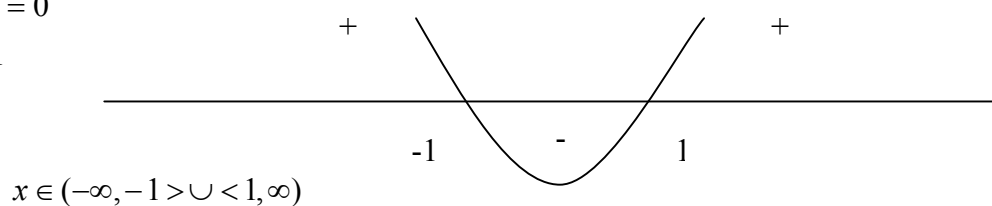
$$\Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = -8 < 0 \Rightarrow \text{brak pierwiastków}$$

$$x^2 - 2x + 3 \rightarrow \text{zawsze dodatnie}$$

$$x+1=0 \quad \text{lub} \quad x-1=0$$

$$x=-1 \quad \quad \quad x=1$$



Zestawienie wyników z dziedziną (iloczyn)

$$D: x \in R - \{-1, 1\} \quad \text{i} \quad \text{roz.}: x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

**Odpowiedź:**  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

## Zadanie 5.

$$\frac{(x+1)(x+3)(2x+4)(x-2)}{(x-5)(x-1)(x-3)} \leq 0$$

Określam D:

$$\begin{array}{l} (x-5)(x-1)(x-3) \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \quad \wedge \quad x-1 \neq 0 \quad \wedge \quad x-3 \neq 0 \\ x \neq 5 \quad \quad x \neq 1 \quad \quad x \neq 3 \end{array}$$

$$D: x \in R - \{1, 3, 5\}$$

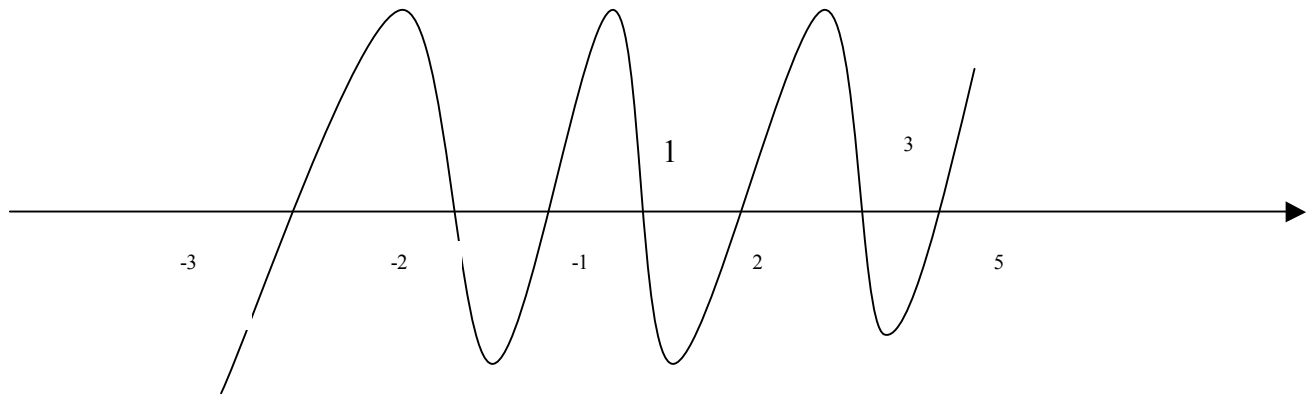
Rozwiązanie:

$$\frac{(x+1)(x+3)(2x+4)(x-2)}{(x-5)(x-1)(x-3)} \leq 0 \quad / \cdot [(x-5)(x-1)(x-3)]^2$$

$$(x+1)(x+3)(2x+4)(x-2)(x-5)(x-1)(x-3) \leq 0$$

Obliczamy pierwiastki:

$$\begin{array}{ccccccc} x = -1; & x = -3; & 2x = -4 / :2; & x = 2; & x = 5; & x = 1; & x = 3 \\ & & x = -2 & & & & \end{array}$$



$$x \in (-\infty, -3 > \cup < -2, -1 > \cup < 1, 2 > \cup < 3, 5 >$$

Zestawienie wyników z D (iloczyn)

$$x \in (-\infty, -3 > \cup < -2, -1 > \cup < 1, 2 > \cup < 3, 5 > \text{ i } \\ x \in R - \{1, 3, 5\}$$

**Odpowiedź:**

$$\underline{x \in (-\infty, -3 > \cup < -2, -1 > \cup (1, 2 > \cup (3, 5)$$

## **Zadanie 6.**

$$\frac{(x^2 - 4)(x + 3)}{(x - 2)(x^2 - 9)} < 0$$

Określam D:

Założenia:

$$(x - 2)(x^2 - 9) \neq 0$$

$$x - 2 \neq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 9 \neq 0$$

$$x \neq 2 \quad (x - 3)(x + 3) \neq 0$$

$$x \neq 3 \quad \wedge \quad x \neq -3$$

$$D: x \in R - \{-3, 2, 3\}$$

Rozwiązanie:

Dla zbadania znaku, iloraz zamieniamy na iloczyn:

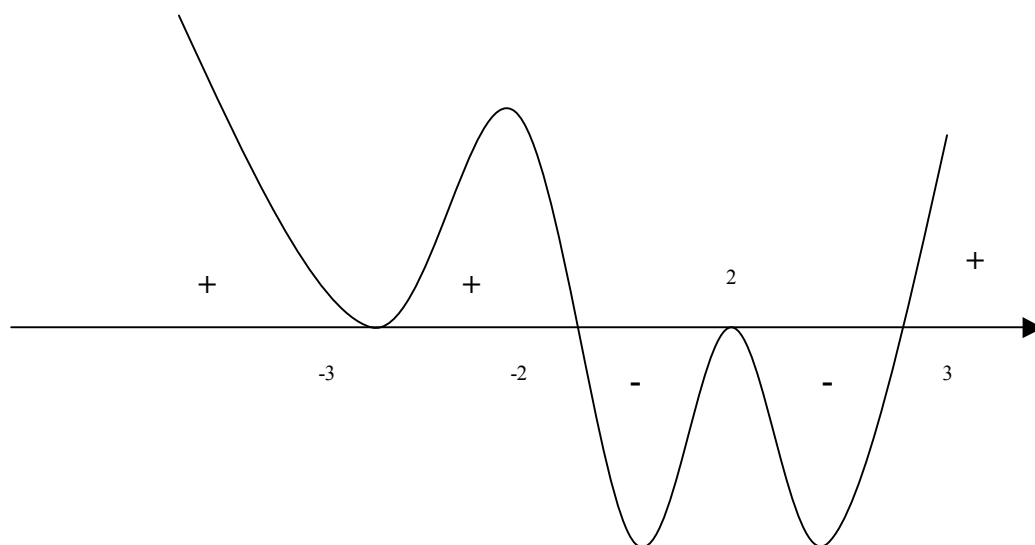
$$(x^2 - 4)(x + 3)(x - 2)(x^2 - 9) < 0$$



$x^2 - 4 = 0$ $(x-2)(x+2) = 0$ $x = 2 \quad \vee \quad x = -2$	$x = -3$	$x - 2 = 0$ $x = 2$	$x^2 - 9 = 0$ $x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$ $x = 3 \quad \quad \quad x = -3$
--	----------	------------------------	---

$X = 2$  – pierwiastek dwukrotny

$X = -3$  – pierwiastek dwukrotny



$$x \in (-2, 2) \cup (2, 3)$$

Zestawienie wyników z dziedziną:

$$x \in (-2, 2) \cup (2, 3)$$

$$D: x \in \mathbb{R} - \{-3, 2, 3\}$$

**Odpowiedź:**  $x \in (-2, 2) \cup (2, 3)$